

文章编号: 1000-7598 (2010) 10-3280-07

模拟三维裂纹问题的扩展有限元法

余天堂

(河海大学 力学与材料学院工程力学系, 南京 210098)

摘 要: 扩展有限元法是一种在常规有限元框架内求解强和弱不连续问题的新型数值方法, 其计算网格与不连续面相互独立, 因此模拟移动不连续面时无需对网格进行重新剖分。给出了模拟三维裂纹问题的扩展有限元法。在常规有限元位移模式中, 基于单位分解的思想加进一个阶跃函数和二维渐近裂尖位移场, 反映裂纹处位移的不连续性。用两个水平集函数表示裂纹。采用线性互补法求解裂纹面非线性接触条件, 不需要迭代, 提高了计算效率。采用两点位移外推法计算裂纹前缘应力强度因子。给出了 3 个三维弹性静力问题算例, 其结果显示了所提方法能获得高精度的应力强度因子, 并能有效地处理裂纹面间的接触问题, 同时表明扩展有限元结合线性互补法求解不连续问题具有较好的前景。

关 键 词: 扩展有限元法; 三维裂纹; 接触条件; 线性互补法; 位移外推法; 应力强度因子

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Extended finite element method for modeling three-dimensional crack problems

YU Tian-tang

(Department of Engineering Mechanics, College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The extended finite element method (XFEM) is a new numerical method for modeling strong as well as weak discontinuities within a standard finite element framework. The computation mesh in XFEM is independent of the discontinuities, such that re-meshing for moving discontinuities can be overcome. An extended finite element method for modeling three-dimensional crack problems is described. In order to model the crack discontinuity, a Heaviside step function and the two-dimensional asymptotic crack-tip displacement fields are added to the finite element approximation for the local enrichment by using the framework of partition of unity. The crack is described with two level set functions. The nonlinear contact conditions between the crack faces are resolved with the linear complementary method; the iterative procedure is avoided. Stress intensity factors of crack front are obtained with two-point displacement extrapolation method. Three examples for three-dimensional elastostatic problems are given; the results show that the method can obtain high accurate stress intensity factors and effectively treat the contact problem between crack surfaces, and the combination of the XFEM and linear complementary method has wonderful practical merits for solving discontinuous problems.

Key words: extended finite element method; three-dimensional cracks; contact conditions; linear complementary method; displacement extrapolation method; stress intensity factors

1 引 言

一般而言, 不连续部位对整个结构的失稳或破坏起控制作用, 因此, 不连续问题的数值模拟一直是研究的热点和难点问题。

扩展有限元法是一种不需要网格重构, 可以处理任意不连续问题的新型数值方法^[1]。在生成扩展有限元的计算网格时不需要考虑结构的任何内部细节, 只需要按照结构的几何外形尺寸生成, 用附加函数加强常规位移以体现裂纹、孔洞和不均匀性的

存在。该方法的出现不过 10 a, 但在国际上受到了极大关注, 得到了快速发展和广泛应用^[2-6]。关于扩展有限元法的文献很多, 绝大多数都集中在二维问题, 考虑不连续面界面条件的不多, 为数不多的文献均采用迭代法求解不连续面的接触条件^[7-9]。

本文的主要内容: ①给出了三维扩展有限元的基本原理; ②采用线性互补法求解裂纹面接触条件, 不需要迭代, 提高了计算效率; ③给出了 3 个算例: 两个断裂力学问题和一个不连续接触问题。算例分析表明, 扩展有限元结合线性互补法能有效

收稿日期: 2009-04-07

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No. 50609004, 50539030); 973 计划 (No. 2007CB714104)。

作者简介: 余天堂, 男, 1971 年生, 博士, 教授, 主要从事工程力学方面的研究。E-mail: yrx06@163.com

地求解不连续问题。

2 裂纹和位移场表示

考虑三维体中一裂纹(图 1)。采用两个水平集描述裂纹,即 ϕ 水平集(其零水平集为裂纹面)和 φ 水平集^[10]。 $\phi=0$ 和 $\varphi=0$ 的交界为裂纹前缘。两个水平集为符号距离函数,即

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \min \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| \text{sign}(\mathbf{n}^+ \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}=[x, y, z]$; $\bar{\mathbf{x}}$ 为 $\mathbf{x}$ 在裂纹面上的正交投影; $\mathbf{n}^+$ 为裂纹面上 $\bar{\mathbf{x}}$ 处外法线; $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数。

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

类似地,可以定义符号距离函数 ϕ 。

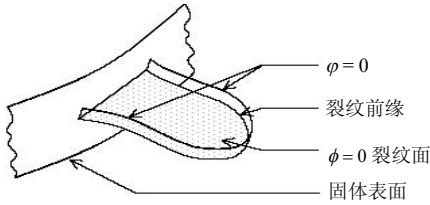


图 1 两个水平集表示空间裂纹

Fig.1 Representation of a crack in three-dimensions by two level sets

假定函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 和函数 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 相互垂直,即 $\nabla \phi \nabla \varphi = 0$ 。 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 称为法向水平集, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ 称为切向水平集。裂纹前缘和裂纹面可以用下式给出:

$$\left. \begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) < 0, & \text{ 裂纹} \\ \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \varphi(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{ 裂纹前缘} \\ \phi(\mathbf{x}, t) > 0, & \text{ 与裂纹不相交} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

符号函数可用形函数逼近,即

$$\phi = \sum_I \bar{N}_I \phi_I \quad (4)$$

$$\varphi = \sum_I \bar{N}_I \varphi_I \quad (5)$$

式中: $\bar{N}_I$ 为有限元形函数; ϕ_I 和 φ_I 均为节点处符号函数值。裂纹形状可以完全用节点符号函数值描述。形函数 $\bar{N}_I$ 可以和位移逼近的形函数不同。

扩展有限单元法中,通过用附加函数加强常规有限元逼近模拟裂纹、孔洞及夹杂等缺陷。扩展有限元的位移逼近可用下式表示:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in II} u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in LL} a_j \bar{N}_j(\mathbf{x}) (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j)) + \sum_{k \in KK} \bar{N}_k(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^4 b_{kl} (\phi_l(\mathbf{x}) - \phi_l(\mathbf{x}_k)) \quad (6)$$

式中: $N_i(\mathbf{x})$ 和 $\bar{N}_j(\mathbf{x})$ 为有限元形函数; u_i 、 a_j 和 b_{kl} 为节点位移和节点加强变量。 $\bar{N}_j(\mathbf{x})$ 和 $N_i(\mathbf{x})$ 可以一样,也可以不一样; II 为离散结构中所有节点的集合; JJ 为裂纹完全贯穿单元节点的集合,用一个修改的 Heaviside 阶跃函数 $H(\mathbf{x})$ 加强,位于裂纹上方取值为 +1,位于裂纹下方取 -1; KK 为裂尖场加强的节点集,围绕裂纹前缘半径为 R 的圆柱体内的节点集。 $R = r_{\text{crr}} V^{\frac{1}{3}}$, V 为裂纹前缘单元的体积, r_{crr} 为常数。

对各向同性弹性体,用水平集函数构造的裂尖函数 $\phi_l(\mathbf{x}) (l=1, \dots, 4)$ 为

$$[\phi_l(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} & \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} & \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} & \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中:

$$r = \sqrt{\phi^2 + \varphi^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\phi}{\varphi} \right) \quad (8)$$

3 裂纹面的接触本构模型

设 $\Omega^{(1)}$ 和 $\Omega^{(2)}$ 为裂纹面上下部分,在裂纹面上建立局部坐标系(图 2)。设上下裂纹面上对应点对的接触应力为 p_n 、 $p_{\tau 1}$ 和 $p_{\tau 2}$; 对应点对的位移为 $(u_n^{(1)}, u_{\tau 1}^{(1)}, u_{\tau 2}^{(1)})$ 和 $(u_n^{(2)}, u_{\tau 1}^{(2)}, u_{\tau 2}^{(2)})$ 。对应点对的法向和切向相对位移为

$$u_n = u_n^{(1)} - u_n^{(2)} \quad (9)$$

$$u_{\tau 1} = u_{\tau 1}^{(1)} - u_{\tau 1}^{(2)} \quad (10)$$

$$u_{\tau 2} = u_{\tau 2}^{(1)} - u_{\tau 2}^{(2)} \quad (11)$$

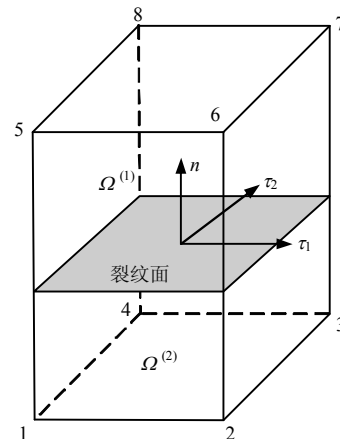


图 2 裂纹面局部坐标

Fig.2 The local coordinates on crack surface

满足 Mohr-Coulomb 定律的弹性接触问题可以用下列等式和不等表示:

$$u_n \geq 0, p_n \leq 0, u_n p_n = 0 \quad (12)$$

$$u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2 = 0, \sqrt{p_{\tau 1}^2 + p_{\tau 2}^2} + \mu p_n - c < 0 \quad (13)$$

$$u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2 \geq 0, \sqrt{p_{\tau 1}^2 + p_{\tau 2}^2} + \mu p_n - c = 0 \quad (14)$$

式中: μ 为裂纹面间摩擦系数; c 为凝聚力。

$p_{\tau i}$ 与 $u_{\tau i}$ 间的关系和 p_n 与 u_n 间的关系类似于理想刚塑性体的应力-应变关系。相对位移 $u_{\tau i}$ 分解为弹性位移和滑动位移, 将 u_n 分解为弹性部分和塑性部分, 可得裂纹面接触本构关系为^[11]

$$p_{ci} = D_{cij} u_{cj} - D_{cij} \frac{\partial g_k}{\partial p_{cj}} \lambda_k, (i, j = 1, 2; k = 1, 2) \quad (15)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} [p_{ci}] &= [p_{\tau 1} \quad p_{\tau 2} \quad p_n]^T \\ [D_{cij}] &= \begin{bmatrix} E_{\tau 1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{\tau 2} & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{bmatrix} \\ [u_{cj}] &= [u_{\tau 1} \quad u_{\tau 2} \quad u_n]^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中: $E_{\tau i}$ 、 E_n 分别为切向和法向罚因子; $g_1 = p_{\tau 1}^2 + p_{\tau 2}^2$, $g_2 = p_n$ 相当于塑性势函数; $\lambda_1 \geq 0$ 和 $\lambda_2 \geq 0$ 相当于流动因子; λ_1 和 f_1 之间具有线性互补关系, $f_1 \lambda_1 = 0$; λ_2 和 f_2 的线性互补关系, $f_2 \lambda_2 = 0$ 。

通过引入约束松弛变量 v_k ($k=1, 2$), 裂纹面上的互补条件为^[12]

$$\left. \begin{aligned} f_k + v_k &= 0 \\ v_k \lambda_k &= 0 \\ v_k \geq 0, \lambda_k \geq 0, (k=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

4 扩展有限元控制方程

考虑接触应力与相对位移关系式 (15) 以及其他边界条件等, 利用虚功原理可得裂纹体的虚功方程:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} D_{ijkl} \delta \varepsilon_{kl} d\Omega + \int_{\Gamma_c} u_{ci} D_{cij} \delta u_{cj} d\Gamma = \\ \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_c} D_{cij} \frac{\partial g_k}{\partial p_{cj}} \lambda_k \delta u_{ci} d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

式 (18) 和式 (17) 构成了裂纹体的互补虚功方程。离散式 (18) 可得扩展有限元求解的控制方程为

$$([K_C] + [K_I]) \{u\} = [H] \{\lambda\} + \{f\} \quad (19)$$

式中: $[K_C]$ 为刚度矩阵, 来自式 (18) 的第 1 项; $[K_I]$ 为裂纹面刚度矩阵, 来自式 (18) 的第 2 项; $\{u\}$ 为节点参数向量; $[H]$ 为一常数矩阵, 来自式 (18) 的最后项; $\{\lambda\}$ 为流动参数向量; $\{f\}$ 为外荷载向量。

无裂纹单元的积分和常规积分一样。含裂纹单元, 先将单元分裂为一些四面体子单元, 四面体子单元的边界和裂纹面几何平行 (图 3), 然后在每个四面体子单元积分上积分, 这样在每个四面体子单元内被积函数都是连续的。

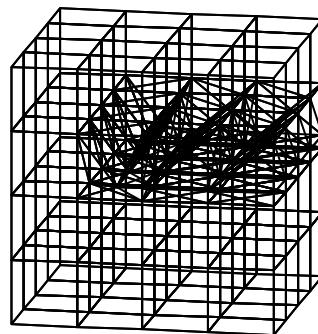


图 3 四面体子单元的形成

Fig.3 Generation of sub-tetrahedrons for integration

为了计算裂纹面上的积分, 需要离散裂纹面 Γ_c 。高斯积分点布置在裂纹面上。扩展有限元中, 裂纹面独立于计算网格几何 (图 4(a)), 这样首先把 Γ_c 分裂为二维多边形, 这些多边形由裂纹面和计算网格的交点形成 (图 4(b))。为了便于积分, 每个多边形再分裂成一些三角形 (图 4(c))。

由于裂纹面相对位移和每个三角形单元内流动因子线性分布, 因此, 在裂纹与网格交点处满足互补条件就足够了。由离散互补条件式 (17), 可得

$$\begin{aligned} [W] \{u\} - [M] \{\lambda\} + \{v\} &= 0 \\ \{\lambda\}^T \{v\} &= 0, \{\lambda\} \geq 0, \{v\} \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19) 可改写为

$$\{u\} = ([K_C] + [K_I])^{-1} ([H] \{\lambda\} + \{f\}) \quad (21)$$

将式 (21) 代入式 (20), 并令 $[\Phi] = [M] - [W]([K_C] + [K_I])^{-1}[H]$ 和 $\{q\} = -[W]([K_C] + [K_I])^{-1} \cdot \{f\}$, 可得

$$\begin{aligned} \{v\} - [\Phi] \{\lambda\} &= \{q\} \\ \{\lambda\}^T \{v\} &= 0, \{\lambda\} \geq 0, \{v\} \geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

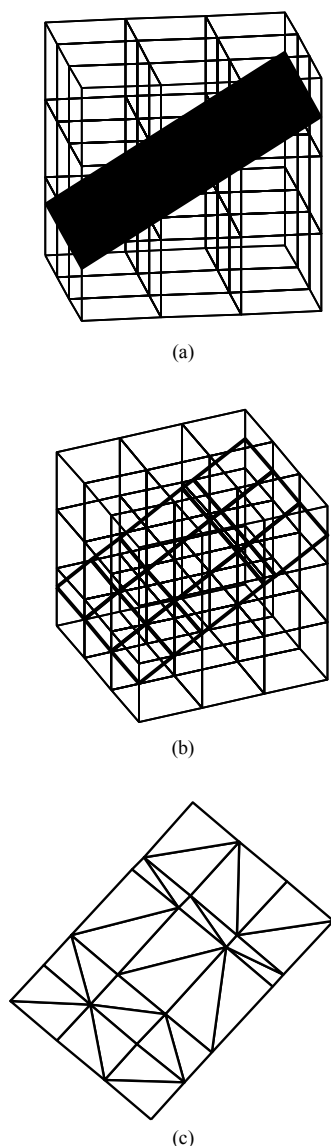


图 4 裂纹面子三角形的形成

Fig.4 Generation of sub-triangles on the crack surface for integration

式 (22) 可由 Lemke 法进行求解, 这样由式 (21) 求得节点位移和节点加强变量。

5 三维应力强度因子的计算

采用位移外推法求应力强度因子。

假定 P 和 N 是裂纹面上的任意两点, 分别在从裂纹前缘出发的同一法线上, 离裂纹前缘的距离分别为 L_P 和 L_N 。以 I 型裂纹为例, 利用文献[13]中裂纹前沿位移展开式的主项, 可从 P 点的位移得

$$K_{IP} = \frac{\sqrt{2\pi E}}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}} v_P \quad (23)$$

式中: E 、 μ 分别为杨氏模量和泊松比; v_P 为 P 点的张开位移, 是从扩展有限元解求得的。同样, 可得到 K_{IN} 和 v_N 的关系式。利用外推公式得

$$K_I = \frac{c}{c-1} K_{IP} - \frac{1}{c-1} K_{IN} \quad (24)$$

式中: $c = \frac{L_N}{L_P}$ 。

类似地, 可以求得 K_{II} 和 K_{III} 。

由式 (6) 可知, 两裂纹面上对应点的相对位移只与节点加强变量有关, 因此, 扩展有限元中很容易求得两裂纹面上对应点的相对位移。

6 数值算例

为了验证本文方法的有效性和可靠性, 给出了 3 个数值算例, 算例 1 为受单向拉伸的平面边裂纹问题, 算例 2 为半椭圆形表面裂纹问题, 算例 3 为水平全断面裂纹问题。前两个算例用来检验本文方法获得的应力强度因子的精度, 第 3 个算例检验裂纹面接触条件的求解。所有算例在形成计算网格时, 都不需要考虑裂纹的存在。

6.1 算例 1

图 5 为一尺寸为 $2\text{ m} \times 3\text{ m} \times 3.5\text{ m}$ 边裂纹试件, 受单向拉伸, $\sigma = 1.0\text{ Pa}$ 。弹性模量 $E = 1\ 000\text{ Pa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$ 。

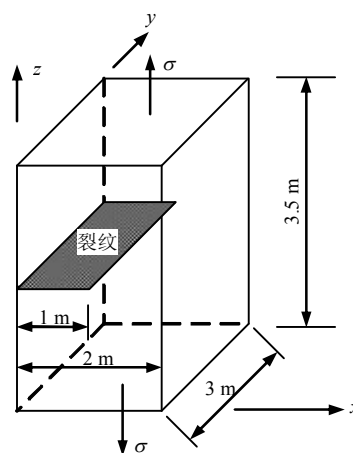


图 5 边裂纹拉伸试件

Fig.5 Edge-crack tension specimen

图 6 为变形图, 图 7 给出了裂纹前缘应力强度因子。裂纹前缘中间部分接近平面应变问题, 由图 7 可知, 裂纹前缘中间部分的应力强度因子和平面应变的应力强度因子很接近。

6.2 算例 2

半无限体含一半椭圆形表面裂纹, 裂纹的短半轴 $a = 0.2\text{ m}$, 长半轴 $b = 0.3\text{ m}$ 。材料的弹性模量 $E = 1.0 \times 10^4\text{ Pa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 半无限体在 z 轴方向受到拉应力 $\sigma = 1.0\text{ Pa}$, xoy 面为约束面, 计算模型的尺寸为 $5\text{ m} \times 5\text{ m} \times 5\text{ m}$ 。

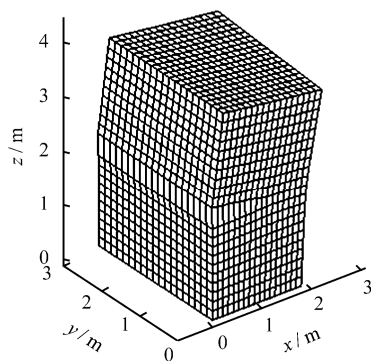


图 6 变形图 (放大 10 倍)

Fig.6 Deformation configurations (multiplied by 10)

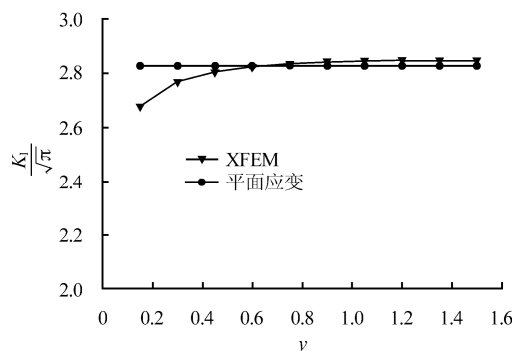


图 7 应力强度因子

Fig.7 Stress intensity factors

图 8 所示为裂纹前缘应力强度因子 K_I 的计算值和与参考值的比较, 参考值采用文献[14]给出的结果。由此可见, 本文方法计算三维裂纹应力强度因子是合理有效的。

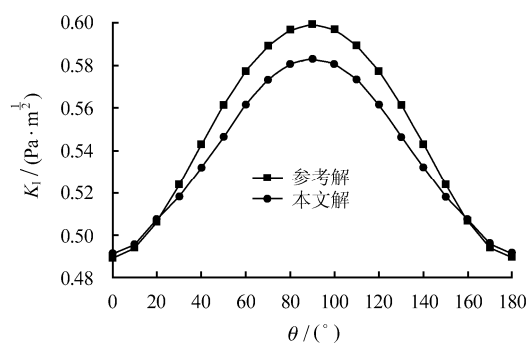


图 8 裂纹前缘应力强度因子的比较

Fig.8 Comparison of SIFs of crack front

6.3 算例 3

一个 $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 6\text{ m}$ 柱, 下端固定, 顶端受均布面力为 $\bar{\mathbf{t}} = [\bar{t}_x \quad \bar{t}_y \quad \bar{t}_z]$, 柱中有一水平裂纹, 见图 9。弹性模量为 $E = 1\,000\text{ Pa}$, 泊松比为 0.3, 裂纹面间摩擦系数为 0.3, 凝聚力为 0, $E_n = E_{t1} = E_{t2} = 1\,000E$ 。用 $6 \times 6 \times 18$ 个六面体单元离散柱(见图 10), 离散柱时不必考虑裂纹位置, 考虑两种工况。

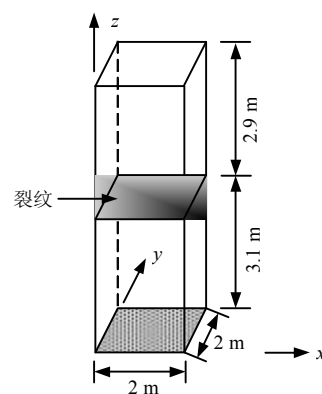


图 9 结构示意图

Fig.9 Sketch of the structure

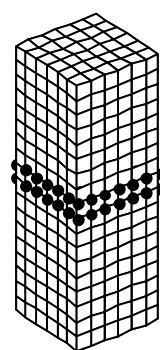


图 10 计算网格和加强节点 (黑色点)

Fig.10 Computation meshes and enriched nodes (black nodes)

(1) 工况 1: $\bar{\mathbf{t}} = [0 \quad 0 \quad -10]$, $\bar{\mathbf{t}}$ 单位为 Pa。

图 11 和图 12 分别为变形图和位移云图。 x 方向和 y 方向的位移分别对称于柱的两个对称轴, 且同一点 x 方向和 y 方向位移相等。由图 11 和图 12 可知, 结果几乎和柱中没裂纹情况一样, 即加强节点附加变量近似为 0, 从而表明该方法的正确性。

裂纹面法向接触应力等于顶部压力, 两个切向接触应力几乎等于 0, 该结果符合实际情况。

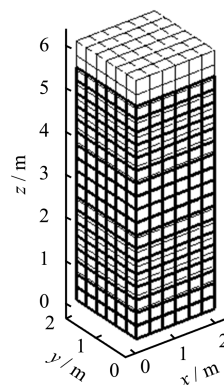


图 11 变形图 (细线为变形前, 粗线为变形后, 放大 10 倍)

Fig.11 Undeformed (fine lines) and deformed (heavy lines) configurations (multiplied by 10)

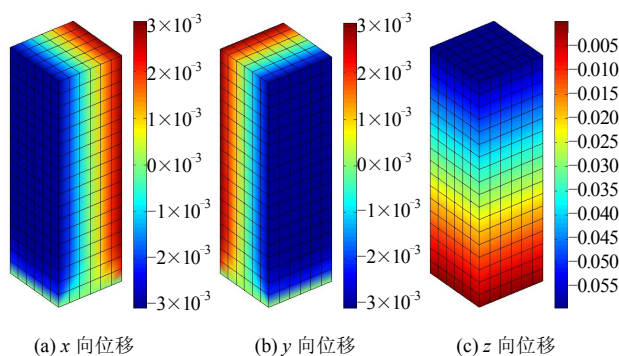
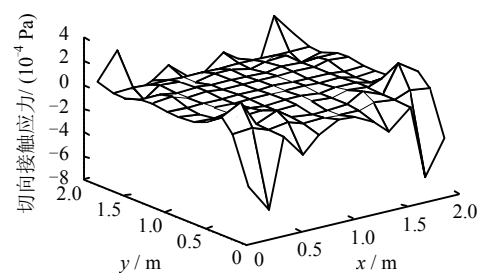


图 12 位移云图 (单位: m)

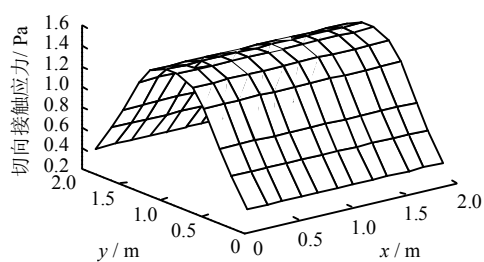
Fig.12 Displacement nephogram (unit: m)

(2) 工况 2: $\bar{t} = [0 \ 1 \ -10]$, $\bar{t}$ 单位为 Pa, 泊松比等于 0。

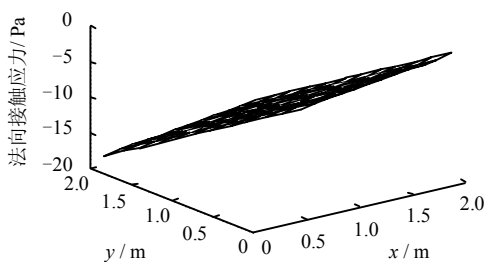
裂纹面接触应力分布见图 13。法向接触应力线性分布,沿切向力方向的切向接触力为抛物线分布,另一个方向切向接触力几乎等于 0。裂纹面处于接触状态。由此可见,该接触应力分布合理。



(a) 切向接触力 1



(b) 切向接触力 2



(c) 法向接触力

图 13 裂纹面接触应力 (单位: Pa)

Fig.13 Contact stresses on the crack surface (unit:Pa)

7 结 语

文中给出了模拟三维裂纹问题的扩展有限元法。扩展有限元分析不连续问题时不连续面与计算网格是相互独立的,因此,能方便地分析不连续力学问题。扩展有限元分析接触问题时,不需要设置接触单元。线性互补法求解接触问题时无迭代,计算精度高。因此,扩展有限元结合线性互补法求解不连续问题具有较好的前景。考虑三维裂纹的扩展将是下一步工作。

参 考 文 献

- [1] NICOLAS MOES, JOHN DOLBOW, TED BELYTSCHKO. A finite element method for crack growth without remeshing[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1999, 46(1): 131—150.
- [2] WELLS G N, SLUYS L J. A new method of modeling cohesive cracks using finite elements[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2001, 50(12): 2667—2682.
- [3] WELLS G N, SLUYS L J, DE BORST R. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002, 53(5): 1235—1256.
- [4] SUKUMAR N, HUANG Z Y, H. PRÉVOST J, et al. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2004, 59(8): 1075—1102.
- [5] CHESSA JACK, SMOLINSKI PATRICK, BELYTSCHKO TED. The extended finite element method (XFEM) for solidification problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002; 53(8): 1959—1977.
- [6] GERSTENBERGER A, WALL W A. An extended finite element method/Lagrange multiplier based approach for fluid-structure interaction[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2008, 197(19—20): 1699—1714.
- [7] DOLBOW JOHN, MOËS NICOLAS, BELYTSCHKO TED. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190(51—52): 6825—6846.

- [8] LIU FUSHEN, BORJA RONALDO I. A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method[J]. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**, 2008, 76(10): 1489—1512.
- [9] KHOEI A R, NIKBAKHT M. An enriched finite element algorithm for numerical computation of contact friction problems[J]. **International Journal of Mechanical Sciences**, 2007, 49(2): 183—199.
- [10] MOËS N, GRAVOUIL A, BELYTSCHKO T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—part II: Level set update[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2002, 53(11): 2569—2586.
- [11] 孙林松, 王德信. 坝体接缝的线性互补模型及横缝对拱坝工作性态的影响[J]. 水利学报, 2003, 34(7): 74—79.
- SUN Lin-song, WANG De-xin. Linear complementary model for joints and the influence of joint on behavior of arch dam[J]. **Journal of Hydraulic Engineering**, 2003, 34(7): 74—79.
- [12] SU R K L, ZHU Y, LEUNG A Y T. Parametric quadratic programming method for elastic contact fracture analysis[J]. **International Journal of Fracture**, 2002, 117(2): 143—157.
- [13] SIH G C, LIEBOW ITZ H. Mathematical theories of brittle fracture, Fracture II[M]. New York: Academic Press, 1968.
- [14] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京: 科学出版社, 1993.